最短路径问题

【例 1】(2011 联考)火车站 A 和 B 与初始发车站 C 的直线距离都等于 a km，站点 A 在发车站 C 的北偏东 20 度，站点 B 在发车站 C 的南偏东 40 度，若在站点 A 和站点 B 之间架设火车轨道，则最短的距离为：

A. a km　　　　B. 3a km

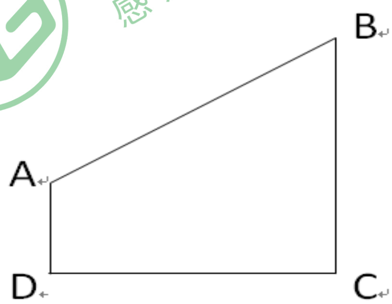
C. 2a km　　　　D. $\sqrt{3}$a km

【例 2】(2017 联考）悟空与二郎神在离地面 1 米的空中决斗，两人相距 2 米，悟空想用分身直接偷袭二郎神，为了不引起对方的警觉，分身必须在地面反弹一次再进行攻击，则分身到达二郎神的位置所走的最短距离为：

A. $2\sqrt{2}$米　　　　B. $\sqrt{3}$米

C. $\sqrt{2}$米　　　　D. $2\sqrt{3}$米

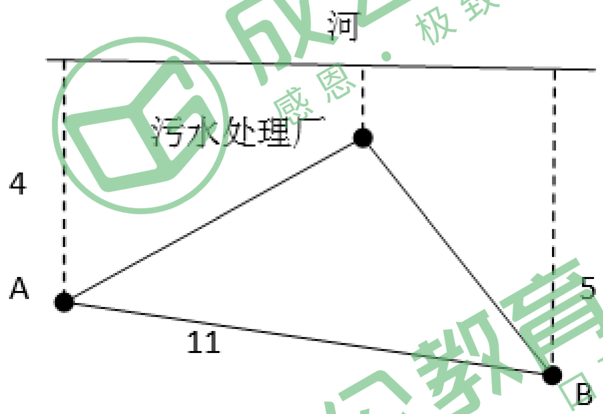
【例 3】(2017 江苏）某市规划建设的 4 个小区，分别位于直角梯形 ABCD 的 4 个顶点处（如图），AD＝4 千米，CD＝BC＝12 千米。欲在 CD 上选一点 S 建幼儿园，使其与 4 个小区的直线距离之和为最小，则 S 与 C 的距离是：



A.3 千米　　　　　　　　　　　B.4 千米

C.6 千米　　　　　　　　　　　D.9 千米

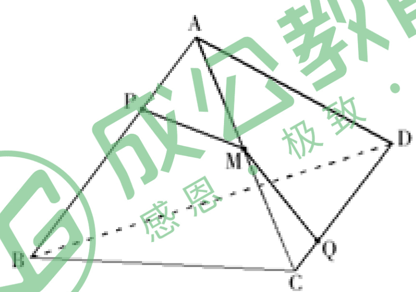
【例 4】（2017 联考）如下图所示，某条河流一侧有 A、B 两家工厂，与河岸的距离分别为 4km 和 5km，且 A 与 B 的直线距离为 11km。为了处理这两家工厂的污水，需要在距离河岸 1km 处建造一个污水处理厂，分别铺设排污管道连接 A、B 两家工厂。假定河岸是一条直线，则排污管道总长最短是：



A.12km　　　　　　　　　　　B.13km

C.14km　　　　　　　　　　　D.15km

【例 5】（2012 江苏）如图，正四面体 ABCD，P、Q 分别是棱 AB、CD 的三等分点和四等分点（AB=3AP=4CQ），棱 AC 上有一点 M，要使 M 到 P、Q 距离之和最小，则 MC：MA=（　）。

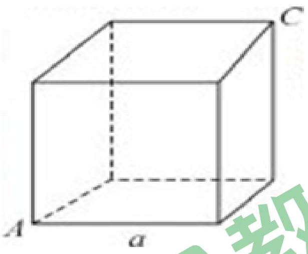


A.1：2　　　　　　　　　　　B.4：5

C.3：4　　　　　　　　　　　D.5：6

【例 6】（2010 福建）一只蚂蚁从下图的正方体的 A 顶点沿正方体的表面爬

到正方体的 C 顶点，设正方体边长为 a，问该蚂蚁爬过的最短路程为：



A. （$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$）a

B. $\sqrt{5}$a

C. （1+$\sqrt{2}$）a

D. （1+$\sqrt{3}$）a

【例 7】（2013 北京）A 和 B 为正方体两个相对的顶点，一个点从 A 出发沿正方体表面以最短路径移动到 B，则其可选择的路线有几条：

A. 2

B. 3

C. 6

D. 12

【例 8】（2012 联考）某公司要在长、宽、高分别为 50 米、40 米、30 米的长方体建筑的表面架设专用电路管道连接建筑物内最远两点，预设的最短管道长度介于：

A. 70—80 米之间

B. 60—70 米之间

C. 90—100 米之间

D. 80—90 米之间

最短路径问题精讲

【注意】考情：1.几何问题是所有地方都会考到的题目。

2.最短路径只是几何问题中的一种。此题型考查较多，方法性（套路）很强，学习的性价比很高。

【知识点】最短路径：

1.题型：求点之间的最短距离。

2.结论：平面上两点之间，线段最短。A、B 两点的最短距离，A、B 之间有无数条路，但是把 A、B 直接连接起来的线段是最短的。

3.题型：平面、立体。

【例 1】(2011 联考)火车站 A 和 B 与初始发车站 C 的直线距离都等于 a km，站点 A 在发车站 C 的北偏东 20 度，站点 B 在发车站 C 的南偏东 40 度，若在站点 A 和站点 B 之间架设火车轨道，则最短的距离为：

A. a km　　B. 3a km

C. 2a km　　D. $\sqrt{3}$a km

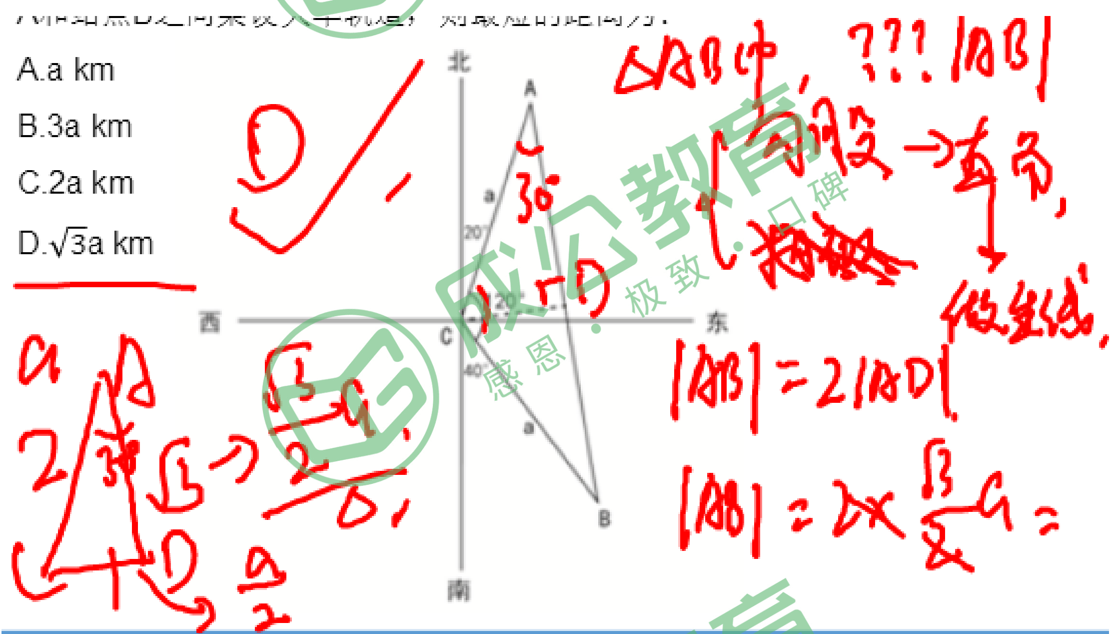
【解析】例 1.北偏东为方位，需要根据“上北下南、左西右东”画图，先画一个十字架，标上箭头；A、C 点有关系，B、C 点有关系，所以以 C 为参考点，根据“站点 A 在发车站 C 的北偏东 20 度，站点 B 在发车站 C 的南偏东 40 度”作图，求最短距离，即连接 A、B 两点，求 AB 的长度。AC=BC，△ABC 为等腰三角

形，∠ACB=180°-20°-40°=120°。

方法一：公务员考试中，三角形求边长用勾股定理和相似三角形。此题只有一个三角形，因此用勾股定理，需要直角，由 C 向 AB 做垂线，与 AB 的交点为 D，|AB|=2|AD|，△ACD 为有 30°的直角三角形，30°对应的边为斜边的一半，CD=a/2，则 AD=$\sqrt{3}$a/2，因此 AB=$\sqrt{3}$a。

方法二：根据结论，AC=BC，∠ACB=120°，边的比为，1：1：$\sqrt{3}$，最长边=$\sqrt{3}$a。

方法三：三角形里，两边之和大于第三边。AB 为最长边，AB＞a，AB 为第三条边，|AB|＜|AC|+|BC|=2a，因此 a＜AB＜2a，排除 A、B、C 项。【选 D】



【注意】1.两点之间线段最短。

2.求三角形的一边，用勾股定理或者相似三角形。

3.特殊三角形：

（1）有一个角为 30°的直角三角形，1：2：$\sqrt{3}$。

（2）等腰直角三角形，1：1：$\sqrt{2}$。

（3）一个角为 120°的等腰三角形，1：1：$\sqrt{3}$。可以利用在此题中，直接得到$\sqrt{3}$a。

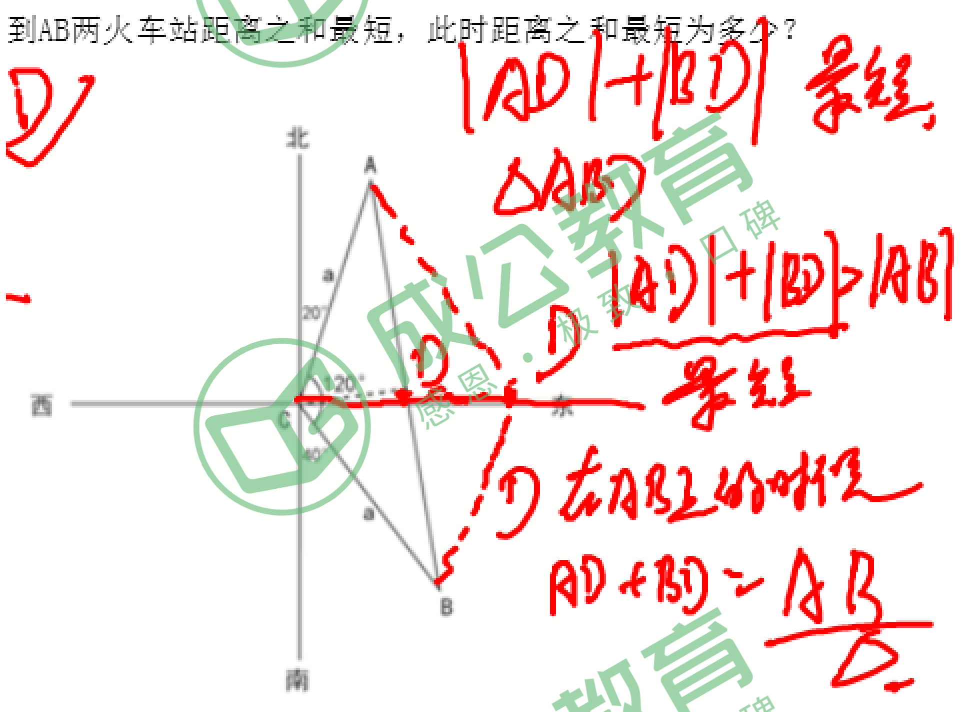
4. 在三角形里，两边之和大于第三边。

【拓展】例：例一条件不变，现在想在火车站 C 的正东方向新建一个客运站，使得客运站到 AB 两火车站距离之和最短，此时距离之和最短为多少？

A. a km　　　　B. 3a km

C. 2a km　　　　D. $\sqrt{3}a$ km

【解析】拓展. 求|AD|+|BD|最短，连接 AD、BD，构成△ABD，|AD|+|BD|＞|AB|，最短的情况为 D 在 AB 上，此时 AD+BD=AB。两点到第三点距离和最短，要三点共线，变为和例 1 相同的题目。【选 D】



【知识点】两点到第三点距离之和最短

1. 结论：三点共线时，距离之和最短

2. 方法：（1）两点在直线异侧，直接连线，交点为第三个点。

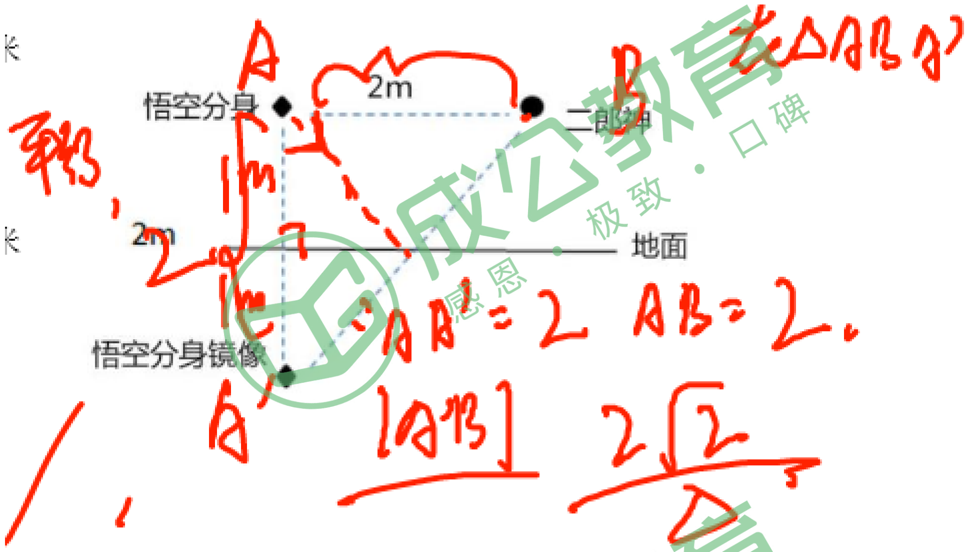
（2）两点同侧，先对称再连线。A、B 点在直线的同侧，C 是直线上的点，求 AC+BC 最短，把 A、B 点放到异侧，即找对称。以直线为对称轴，找到 A 的对称点 A’，AC=A’C，因此 AC+BC=A’C+BC，三点共线时最短。

【例 2】（2017 联考）悟空与二郎神在离地面 1 米的空中决斗，两人相距 2 米，悟空想用分身直接偷袭二郎神，为了不引起对方的警觉，分身必须在地面反弹一次再进行攻击，则分身到达二郎神的位置所走的最短距离为：

A. $2\sqrt{2}$米　　　　B. $\sqrt{3}$米

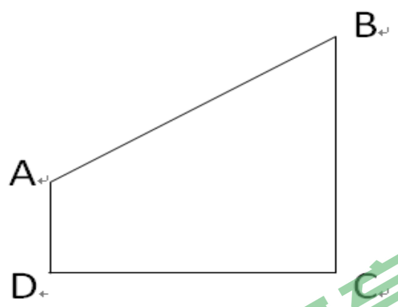
C. $\sqrt{2}$米　　　　D. $2\sqrt{3}$米

【解析】例 2. 最短路径问题。假设 A 点为悟空，B 点为二郎神，地面的点为 C，求|AC|+|BC|最小，属于同侧问题，先对称，作出 A 的镜像 A’，高度为 1，AA’=2，AB=2，连接 A’B。悟空和二郎神在同一水平面，所以与地面平行，因此 AA’垂直于地面，则∠A’AB=90°，△ABA’为等腰直角三角形，边长之比为 1：1：$\sqrt{2}$，因此 A’B=$2\sqrt{2}$。【选 A】



【注意】先判断为同侧问题，需要作 A 的对称点，连接 B 与对称点，用勾股定理求解。

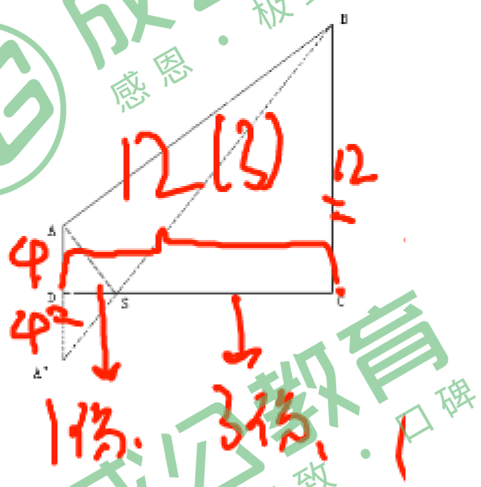
【例 3】（2017 江苏）某市规划建设的 4 个小区，分别位于直角梯形 ABCD 的 4 个顶点处（如图），AD＝4 千米，CD＝BC＝12 千米。欲在 CD 上选一点 S 建幼儿园，使其与 4 个小区的直线距离之和为最小，则 S 与 C 的距离是：



A. 3 千米　　　　　　　　　　　　　B. 4 千米

C. 6 千米　　　　　　　　　　　　　D. 9 千米

【解析】例 3. AS+BS+CS+DS 为最小，CS+DS=CD，因此变为 AS+BS+12 为最小，即求 AS+BS 最小，转化为 A、B 点到 S 点的路径最短（最短路径问题）。CD 为一条线，A、B 在上面，属于同侧，以 CD 为轴，把 A 对称到 A’，AS=A’S，连接 A’B，交点 S 为所求的点。如果求 CS，只有一条直角边的值，无法使用勾股定理，用相似三角形，两个三角形有对顶角，分别有直角，因此△A’DS∽△BCS，因此 A’D/BC=DS/CS=4/12=1/3，DS 为 1 份，CS 为 3 份，CD 的总长为 12，则 1 份对应 3，3 份对应 9。【选 D】

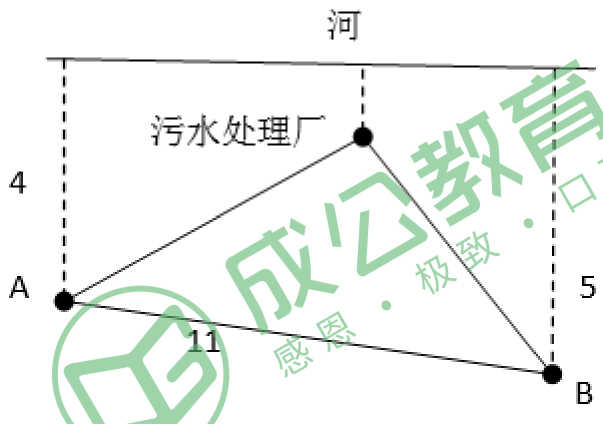


【注意】1. 给的图一定为标准图，可以量，但是需要对称后得到 A’、连接 A’B 之后量。总长为 12，CS＞CD 的一半=6，直接选 9 即可。

2. 对于两点同侧，对称哪一个点都可以，因此此题可以对称 B 点，但是一般对称短的那一个。

【例 4】（2017 联考）如下图所示，某条河流一侧有 A、B 两家工厂，与河岸

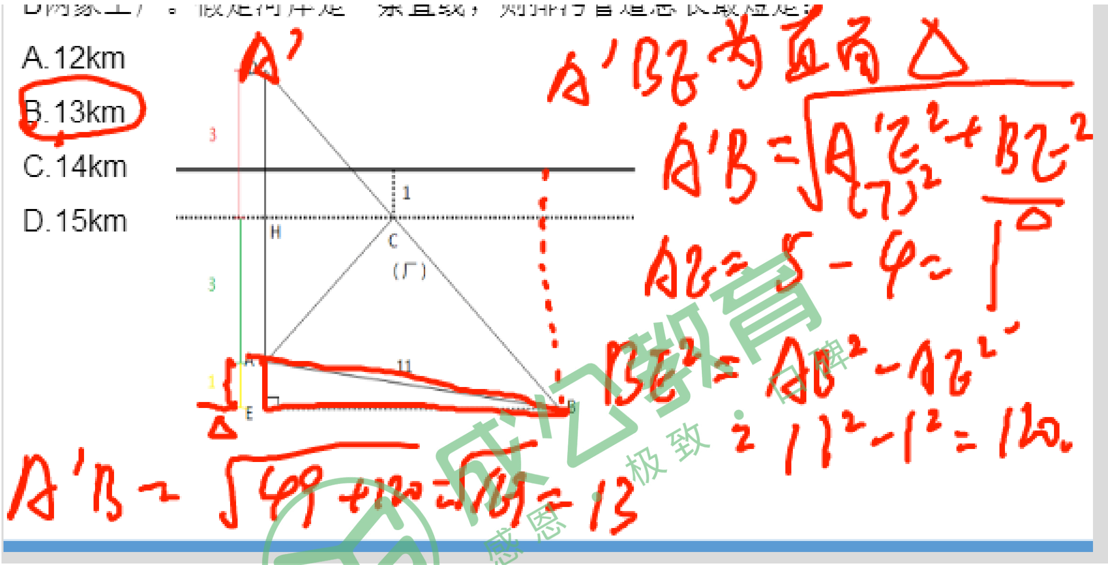
的距离分别为 4km 和 5km，且 A 与 B 的直线距离为 11km。为了处理这两家工厂的污水，需要在距离河岸 1km 处建造一个污水处理厂，分别铺设排污管道连接 A、B 两家工厂。假定河岸是一条直线，则排污管道总长最短是：



A. 12km　　　　B. 13km

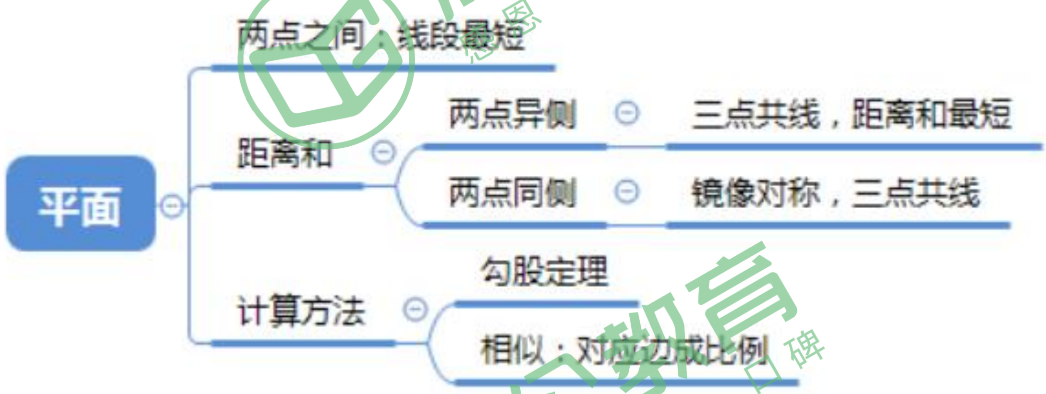
C. 14km　　　　D. 15km

【解析】例 4. 题目为河流一侧，因此为同侧。设污水厂为 C，求 AC+BC 的最小值。若以河为对称轴，求的点为交点，此时 C 建在河里，因此此题的对称轴是第三个点所在的水平线，过 C 作一条沿河岸的平行线，轴距离河岸为 1km。作 A 的镜像 A’，求 A’C+BC=A’B。相似三角形只能得到比例，不能得到长度，因此要借助辅助线。过 B 点向 AA’作垂线，垂点为 E，△A’BE 为直角三角形，因此 A’B= $\sqrt{A'E^2+BE^2}$，AE=5−4=1，A’E=7，△ABE 为直角三角形，$BE^2=AB^2-AE^2=11^2-1^2=120$，因此 A’B=$\sqrt{A'E^2+BE^2}$=$\sqrt{49+120}$=$\sqrt{169}$=13。【选 B】



【注意】1. 两端同侧求最短路径，要过 C 点做河岸的平行线，作 A 的对称点 A’，连接 A’B。

2. 要计算，构造直角三角形，要求$\sqrt{A'E^2+BE^2}$。B 到河岸距离为 5，A 到河岸的距离为 4，因此 B 点比 A 点的垂直距离多了 1km。



【小结】平面：

1. 两点之间：线段最短。

2. 距离和：

（1）两点异侧：三点共线，距离和最短。

（2）两点同侧：镜像对称，三点共线。

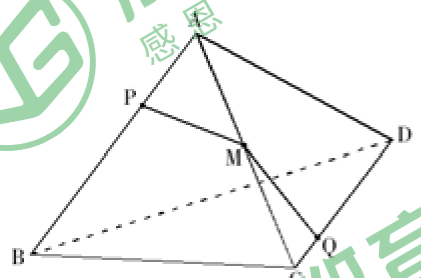
3. 计算方法：

（1）勾股定理。

（2）相似：对应边成比例。

【注意】立体的最短路径更加简单，基本上没有计算量，展开到同一个平面即可。

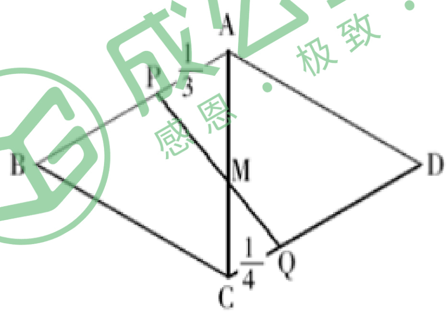
【例 5】（2012 江苏）如图，正四面体 ABCD，P、Q 分别是棱 AB、CD 的三等分点和四等分点（AB=3AP=4CQ），棱 AC 上有一点 M，要使 M 到 P、Q 距离之和最小，则 MC∶MA=（　）。



A. 1：2　　B. 4：5

C. 3：4　　D. 5：6

【解析】例 5. 先把 P、Q 放在同一平面，展开后如下图所示。由“P、Q 分别是棱 AB、CD 的三等分点和四等分点（AB=3AP=4CQ）”可知，AP=AB/3，CQ=AB/4，n 等分点即边长/n。本题没有具体长度，问的是比例，用相似。要让（PM+MQ）最短，则三点共线，连接 PQ，与 AC 的交点即 M 点。∠AMP=∠QMC（对顶角相等），∠PAM=∠MCQ=60°，则△APM∽△CQM，因此 MC/MA=CQ/AP=（AB/4）÷（AB/3）=3：4。【选 C】

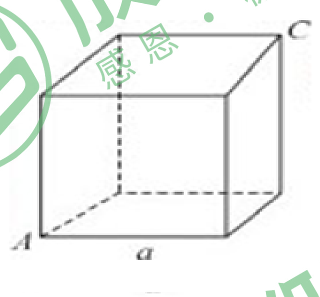


【注意】1. 正四面体：所有边、所有角都相等，每一个面的三角形都是等边三角形，角为 60°。

2. 立体图形不能直接用尺子量，因为投影之后会变形，每条边的长度不是实际长度。

【答案汇总】1-5：DADBC

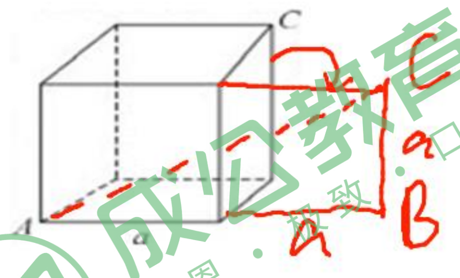
【例 6】（2010 福建）一只蚂蚁从下图的正方体的 A 顶点沿正方体的表面爬到正方体的 C 顶点，设正方体边长为 a，问该蚂蚁爬过的最短路程为：



A. （$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$）a　　　　B. $\sqrt{5}$a

C. （1+$\sqrt{2}$）a　　　　D. （1+$\sqrt{3}$）a

【解析】例 6. 最短路径问题，先展开，把 A、C 点放在同一平面，如下图所示。两点之间线段最短，连接 AC，根据勾股定理，AC=$\sqrt{AB^2+BC^2}$=$\sqrt{4a^2+a^2}$=$\sqrt{5}$a。【选 B】



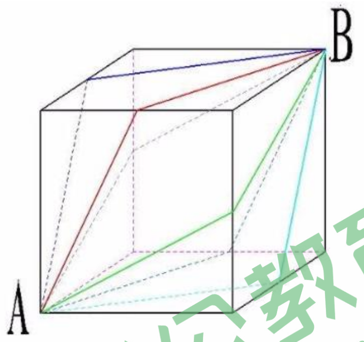
【例 7】（2013 北京）A 和 B 为正方体两个相对的顶点，一个点从 A 出发沿正方体表面以最短路径移动到 B，则其可选择的路线有几条：

A. 2　　　　B. 3

C. 6　　　　D. 12

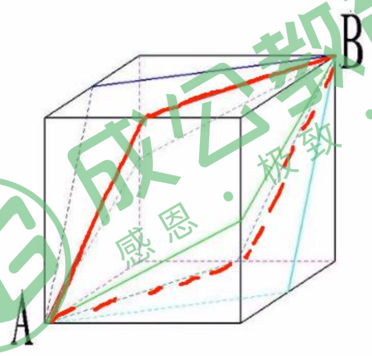
【解析】例 7. 本题问最短路径的路线有几条，从 A 点出发，有前面、左面、

下面 3 个面，每个面有 2 条路，共 3*2=6 条路线。【选 C】



【注意】1. 如果下面不能走，则只有 4 条路线，但选项中没有 4 条，因此不用钻牛角尖。

2. 正方体或长方体都有 3 组对立面，从前面的上面走，对应从下面的后面走（如下图），说明每一条路线在对立面上都有一条与之对应的路线，因此每组对立面有 2 条路线，3 组对立面共 6 条路线。



3. 2017 年考了 4 道最短路径的题目（联考 2 个、江苏 1 个、吉林 1 个），2018 年也有可能考。结论性比较强的题目经常隔几年再翻出来考，一定要记住结论，直接用结论做题。

【知识点】正方体（相对的两个顶点）：

最短路径（沿表面走）结论：

1. 距离：$\sqrt{5}$边长。

2. 路径数：6 条。

【例 8】（2012 联考）某公司要在长、宽、高分别为 50 米、40 米、30 米的长方体建筑的表面架设专用电路管道连接建筑物内最远两点，预设的最短管道长

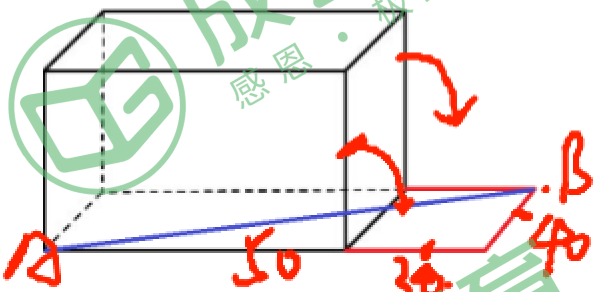
度介于：

A. 70—80 米之间　　　　B. 60—70 米之间

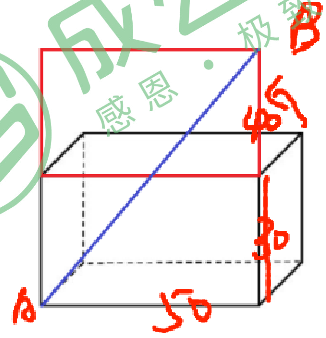
C. 90—100 米之间　　　　D. 80—90 米之间

【解析】例 8. 对于长方体而言，最远两点就是对角的两个顶点。正方体 6 个面都一样，而长方体有上下、左右、前后共 3 组面，每组面都不同，则展开方式也有 3 种。

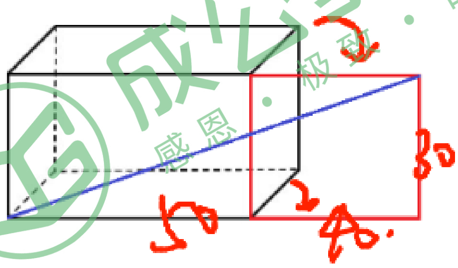
（1）右侧面往下翻，AB=$\sqrt{(50+30)^2+40^2}=\sqrt{8000}$。



（2）把上面掀起来，AB=$\sqrt{50^2+(30+40)^2}=\sqrt{7400}$。



（3）右侧面往前翻，AB=$\sqrt{(50+40)^2+30^2}=\sqrt{9000}$。



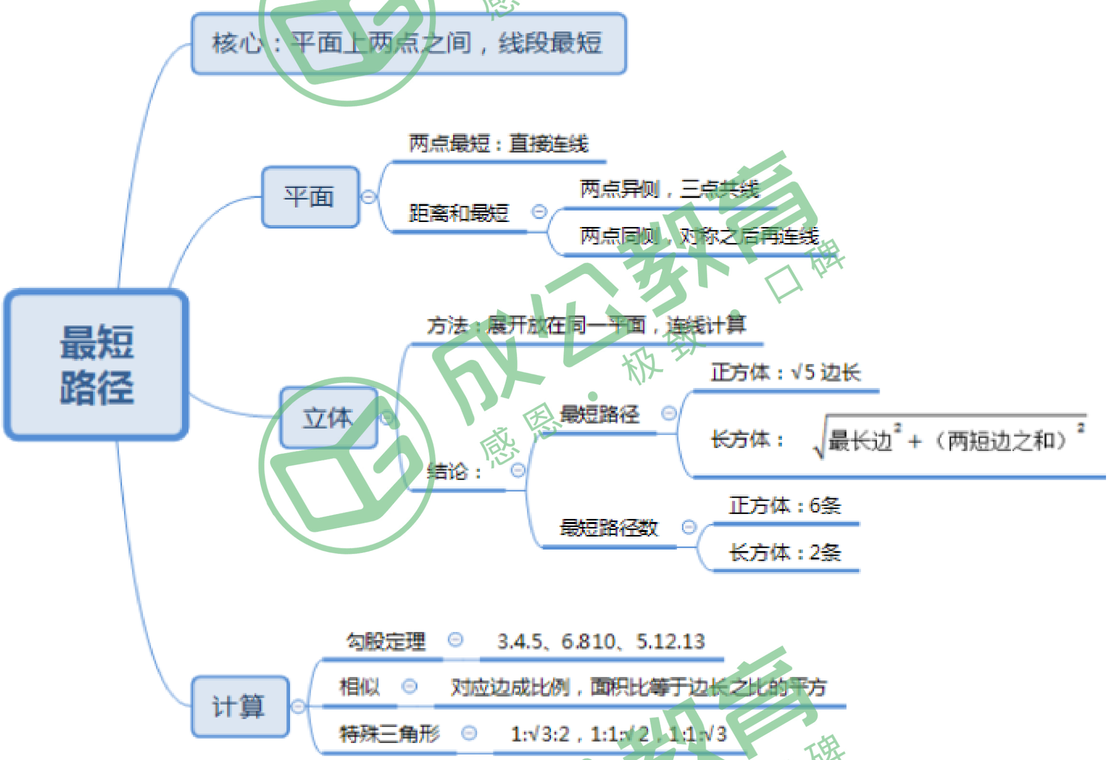
可知最短的是$\sqrt{7400}$，不用计算，把选项的数字放在根号下面，A 项：$\sqrt{4900}$和$\sqrt{6400}$之间，排除；同理排除 B、C 项；$\sqrt{7400}$在 80（$\sqrt{6400}$）~90（$\sqrt{8100}$）之间，对应 D 项。【选 D】

【知识点】长方体（相对的两个顶点）：

最短路径（沿表面走）结论：

1. 最短距离：$\sqrt{\text{最长边}^2+\text{两短边之和}^2}$。如例 8 中的“50 米、40 米、30 米”，其中 50 米最长，则最短距离=$\sqrt{50^2+(30+40)^2}=\sqrt{7400}$

2. 最短路径数：2 条。原理：长方体存在对立面，则每一条路径都有一条与之相对的路径，因此有 2 条。



【小结】最短路径（性价比很高）：考查较多且方法性强，基本用不到公式。

1. 核心：平面上两点之间，线段最短。

2. 平面：

（1）两点最短：直接连线。

（2）距离和最短：①两点异侧，三点共线。②两点同侧，对称之后再连线。

3. 立体：

（1）方法：展开放在同一平面，连线计算。

（2）结论：①最短路径：正方体：$\sqrt{5}$边长；长方体：$\sqrt{\text{最长边}^2+\text{两短边之和}^2}$。

②最短路径数：正方体：6 条；长方体：2 条。

4. 计算：

（1）勾股定理：①3、4、5；②6、8、10；③5、12、13。

（2）相似：对应边成比例，面积比等于边长之比的平方，若边长之比为 1：2，则面积之比为 1：4。

（3）特殊三角形：①1：$\sqrt{3}$：2；②1：1：$\sqrt{2}$；③1：1：$\sqrt{3}$。

【答案汇总】6-8：BCD

【答案汇总】1-5：DADBC；6-8：BCD